

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ МЕТОДА НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

© В.В. Обуховский

Ключевые слова: направляющая функция; дифференциальное включение; периодическое решение; бифуркация

Обсуждаются современные развития метода направляющих функций в теории дифференциальных включений и управляемых систем: негладкие направляющие функции, интегральные направляющие функции, направляющие функции в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Рассматриваются приложения к существованию периодических и обобщенно периодических решений, граничных задач, бифуркациям семейств решений и другие вопросы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Math. 2076. Berlin: Springer, 2013.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00328 и 12-01-00392.

Obukhovskii V.V. ON SOME APPLICATIONS OF THE METHOD OF GUIDING FUNCTIONS IN PROBLEMS OF NONLINEAR ANALYSIS AND CONTROL THEORY

We discuss the contemporary developments of the method of guiding functions in theory of differential inclusions and control systems: non-smooth guiding functions, integral guiding functions, guiding functions in infinite-dimensional spaces. We consider applications to the existence of periodic and generalized periodic solutions, boundary value problems, bifurcations of families of solutions and other questions.

Key words: guiding function; differential inclusion; periodic solution; bifurcation.

УДК 517.512.2

О ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© Б.П. Осиленкер

Ключевые слова: ортогональные полиномы; ряды Фурье; нагруженные ортонормированные полиномы; уравнение теплопроводности; обобщенное уравнение теплопроводности; функция Грина.

В работе анонсировано представление функции Грина для обобщенного уравнения теплопроводности, собственные функции которого содержат нагруженные ортонормированные полиномы.

В линейном пространстве $\mathbb{P}$ полиномов с вещественными коэффициентами введем скалярное произведение

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) w(x) dx + \sum_{j=1}^m M_j p(x_j) q(x_j) \quad (1)$$

$$(p, q \in \mathbb{P}; x_j \in [a, b], j = 1, 2, \dots, m),$$

где $w(x)$ – весовая функция (положительная почти всюду в $[a, b]$ интегрируемая функция), M_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – неотрицательные вещественные числа.

С помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта построим последовательность нагруженных полиномов степени n : $\{\hat{q}_n(x) \equiv \hat{q}_n(x; M_1, M_2, \dots, M_m)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots; x \in [a, b]$), ортонормированных в скалярном произведении (1):

$$\langle \hat{q}_n, \hat{q}_m \rangle = \delta_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\delta_{m,n}$ – функция Кронекера.

Задача исследования нагруженных систем, возникающих в математической физике, была поставлена в классической книге Р.Куранта и Д.Гильберта «Методы математической физики» и исследована в большом числе работ.

Нагруженные ортонормированные полиномы $\{\hat{q}_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$x q_n(x) = a_n \hat{q}_{n+1}(x) + u_n \hat{q}_n(x) + a_{n-1} \hat{q}_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \hat{q}_{-1}(x) \equiv 0),$$

причем для рекуррентных коэффициентов справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b.$$

П р и м е р. Нагруженные полиномы Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta; L, M)}(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, x \in [-1, 1]$), ортонормированные в скалярном произведении (1)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta; L, M)}(x) P_m^{(\alpha, \beta; L, M)}(x) w_{\alpha, \beta}(x) dx + M P_n^{(\alpha, \beta; L, M)}(-1) P_m^{(\alpha, \beta; L, M)}(-1) + \\ & + L P_n^{(\alpha, \beta; L, M)}(1) P_m^{(\alpha, \beta; L, M)}(1) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где $w_{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ($\alpha > -1, \beta > -1; x \in [-1, 1]$) – вес Якоби.

Пусть L – дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля, для которого выполняется $L_x p_n(x) = -\lambda_n p_n(x)$, где $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$.

Рассмотрим обобщенное уравнение теплопроводности

$$L_x f = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (0 < t < \infty). \quad (2)$$

Его обобщенное решение (в смысле Бохнера) имеет вид

$$f_t(x) = \int_a^b f(t) G(x, y, t) w(y) dy + \sum_{j=1}^m M_j f(x_j) G(x, x_j, t),$$

где

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \hat{q}_n(x) \hat{q}_n(y) \quad (3)$$

– функция Грина для уравнения (2).

Т е о р е м а. Пусть система ортонормированных полиномов $\{\hat{q}_n(x)\}$ и последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ таковы, что ряд (3) сходится равномерно при $x, y \in K \subset (a, b)$ и $t \geq t_0 > 0$. Тогда при этих значениях имеет место представление

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \{ [1 - e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n)t}]^2 + e^{-(\lambda_{n+2} - \lambda_n)t} [1 - e^{-\Delta^2 \lambda_n t}] \} \vartheta_n(x, y),$$

где $\vartheta_n(x, y) = a_n a_{n+1} [\hat{q}_n(x) \hat{q}_{n+2}(y) + \hat{q}_{n+2}(x) \hat{q}_n(y)] - 2a_n^2 \hat{q}_{n+1}(x) \hat{q}_{n+1}(y) +$

$$+ 2 \sum_{k=0}^n (a_k^2 - a_{k-1}^2) q_k(x) q_k(y) + 2 \sum_{k=0}^n a_k (u_{k+1} - u_k) [\hat{q}_k(x) \hat{q}_{k+1}(y) + \hat{q}_{k+1}(x) \hat{q}_k(y)].$$

С помощью полученного представления можно получить условия на $\{\hat{q}_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, при которых соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = f(x)$$

выполняется равномерно и почти всюду.

Osilenker B.P. ON THE GREEN FUNCTION FOR A GENERALIZED HEAT EQUATION

In the work, for a generalized heat equation, there is given a representation of the Green function with the eigenfunctions containing loaded orthonormal polynomials.

Key words: : orthogonal polynomials; Fourier series; loaded orthonormal polynomials; heat equation; generalized heat equation; Green function.

УДК 51-77, 517.988

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© Н.Г. Павлова

Ключевые слова: α -накрывающие отображения; точки совпадения отображений; равновесные цены.

Исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в нелинейных моделях рынка. Получены достаточные условия существования вектора равновесных цен, а также устойчивости вектора равновесных цен к малым возмущениям модели. Эти результаты получены как следствия теорем теории α -накрывающих отображений о существовании и устойчивости точек совпадения.

В настоящей работе результаты теории накрывающих отображений применяются к исследованию положения равновесия в нелинейных экономических моделях. Под равновесием понимается такое состояние экономической системы, включающей в себя нескольких взаимосвязанных участников, при котором ни один из них не заинтересован в изменении своего состояния. В исследуемых моделях участники экономической системы подразделяются на производителей и потребителей. Рассмотрены различные модели поведения потребителей. Для каждой из них построена функция спроса как решение задачи нахождения условного